941. 函数方程式

$$f(x+y)f(x-y)=\frac{f^2(x)+f^2(y)}{1-k^2(1-f^2(x))(1-f^2(y))}-1$$

$(1 \geqq k \geqq 0)$ ニ就イテ

春 木　　博(神戸商専商船)

今函数方程式

$$\text{(F)}\quad f(x+y)f(x-y)=\frac{f^2(x)+f^2(y)}{1-k^2(1-f^2(x))(1-f^2(y))}-1$$

$$(1 \geqq k \geqq 0)$$

ヲ満足シ、原点ノ近傍デ定符号且ツ可測ナル函数 $f(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

(F) ニ於テ $x=y=0$ トオケバ常数解ヲ除ケバ $f(0)=\pm 1$ ナルコトが判ル。$f(x)$ が解ナラバ $-f(x)$ モ解ナル故、$f(0)=1$ トシテ以下論ズル。

(F) ニ於テ　$y=x$ トオケバ

(1) $$f(2x)=\frac{2f^2(x)}{1-k^2(1-f^2(x))^2}-1$$

(F) ニ於テ x ノ代リニ $x+y$, y ノ代リニ $x-y$ ヲオケバ

$$f(2x)f(2y)=\frac{f^2(x+y)+f^2(x-y)}{1-k^2(1-f^2(x+y))(1-f^2(x-y))}-1$$

上式ヘ (1) ヲ代入スレバ

(2) $$\left\{\frac{2f^2(x)}{1-k^2(1-f^2(x))^2}-1\right\}\left\{\frac{2f^2(y)}{1-k^2(1-f^2(y))^2}-1\right\}$$

$$=\frac{f^2(x+y)+f^2(x-y)}{1-k^2(1-f^2(x+y))(1-f^2(x-y))}-1$$

(F) 及ビ (2) ヲ $f(x+y)$, $f(x-y)$ ニ関スル聯立方程式ト見テ、ソノ實根條件ヲ求ムレバ常ニ $|f(x)|\leqq 1$ ナルカ、常ニ $|f(x)|\geqq 1$ ナルカ何レカナルコトガ判ル。

(イ) $|f(x)|\leqq 1$ ナルトキ

$f(0)=1$ デ、シカモ原点ノ近傍デ連續ナル故、原点ノ近傍デ $f(x)>0$ デアル。故ニ (F) ノ両辺ノ對數ヲトレバ

$$\log f(x+y)+\log f(x-y)=\log\left\{\frac{f^2(x)+f^2(y)}{1-k^2(1-f^2(x))(1-f^2(y))}-1\right\}$$

$|f(x)|\leqq 1$; 即チ $f(x)$ ハ有界ニシテ又可測ナル故、上式ノ両辺ヲ 0 ヨリ $\lambda\,(\neq 0)$ マデ、y ニツキ Lebesgue 積分シテ $u=f(x)$ ト書ケバ

(3) $$\int_0^\lambda \log f(x+y)\,dy+\int_0^\lambda \log f(x-y)\,dy$$

$$=\int_0^\lambda \log\left\{\frac{u^2-f^2(y)}{1-k^2(1-u^2)(1-f^2(y))}-1\right\}dy$$

$$\equiv \int_0^{\lambda} F(u)\,dy$$

次ニ $\varphi_n(u) = \dfrac{F\left(u+\frac{1}{n}\right) - F(u)}{\frac{1}{n}}$ トオケバ

$$|\varphi_n(u)| < M$$

ナルコトガ容易ニ判ル，コノMハu及ビnニ無関係ナ数デアル。

シカモ $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(u) = \dfrac{dF}{du}$ ナル故、Lebesgueノ fundamental theorem ニヨリ

$$\frac{d}{du}\int_0^{\lambda} F(u)\,dy = \int_0^{\lambda} \frac{dF}{du}\,dy$$

トナル。

λヲ適当ニトレバ

$$\int_0^{\lambda} \frac{dF}{du}\,dy \neq 0$$

ナラシメ得ルコトガ判ル。

即チλヲ適当ニトレバ

$$\frac{d}{du}\int_0^{\lambda} F(u)\,dy \neq 0$$

故ニ陰函数ノ定理ニヨリ (3) ノ右辺ヨリ $f(x)$ ニツイテ、原点ノ近傍デ一義的ニトイテ出セル。即チ G ハ連続函数ニシテ

$$f(x) = G\left\{\int_0^{\lambda} \log f(x+y)\,dy + \int_0^{\lambda} \log f(x-y)\,dy\right\}$$

シカモ $\int_0^\lambda f(x+y)\,dy+\int_0^\lambda f(x-y)\,dy$ ハxノ連続函数ナル故、$f(x)$ハ原点ノ近傍デ連續トナル。

$f(x)$ガ連続ナラバ上ノ証明ヲ再ビタドルコトニヨリ$f(x)$ハ連続微分可能ナルコトガ判ル。

$f(x)$ガ連続微分可能ナラバ(F)ヲ一回微分シ、上述ノ論法ヲクリカヘセバ、$f(x)$ハ二回微分可能ナルコトガ容易ニ判ル。

又(F)ニ於テ$y=x$トオクコトニヨリ$f(x)$ハ偶函数ナルコトヲ知ル。

(F)ヲyニ関シテ二度微分シテ$y=0$トオクニ$f(x)$ガ偶函数ナルコトカラ$f'(0)=0$, 又$f''(0)=\alpha$トスレバ

$$f''(x)f(x)-f'^2(x)-\alpha k^2 f^4(x)-\alpha(1-k^2)=0$$

コノ微分方程式ヲ解イテ$|f(x)|\leqq 1$ニ適スルモノヲ求ムレバ

$$f(x)=cn[\alpha x;\,k]\quad (茲ニ\ \alpha\ ハ任意ノ實數)$$

(ロ) $|f(x)|\geqq 1$ナルトキ.

(F)ニ於テ$f(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$トオイテ$\varphi$ニ関スル函數方程式ニ置ケバ

$$\text{(G)}\quad \varphi(x+y)\varphi(x-y)=\frac{\varphi^2(x)+\varphi^2(y)}{1-(1-k^2)(1-\varphi^2(x))(1-\varphi^2(y))}-1$$

シカモ$|f(x)|\geqq 1$ナル故$|\varphi(x)|\leqq 1$トナル。

(G)ナル函数方程式ハ(F)ナル函数方程式ニ於テk^2ノ代リニ$1-k^2$ヲオイタダケデアル。($1\geqq\sqrt{1-k^2}\geqq 0$)。

$f(x)$ が原点ノ近傍デ定符号デ可測ナラバ $\varphi(x)$ モ原点ノ近傍デ定符号デ可測ナル故、(G) ヨリ前ト全然同様ニシテ

$$\varphi(x) = cn\left[\alpha x;\sqrt{1-k^2}\right]$$

$$\therefore\quad f(x) = \frac{1}{cn\left[\alpha x;\sqrt{1-x^2}\right]} \qquad (\text{茲ニ } \alpha \text{ ハ任意ノ實數})$$

結局求ムル解ハ

$$\pm cn\left[\alpha x;\ k\right],\ \pm\frac{1}{cn\left[\alpha x;\sqrt{1-k^2}\right]} \qquad (\text{茲ニ } \alpha \text{ ハ}$$

實意ノ実数) トナル.

之等ハ明ニ (F) ヲ満足サセル。

——(完)——